FISICA

ElettroMagnetismo

Fenomeni di elettrostatica

Autore: prof. ***Pappalardo Vincenzo***

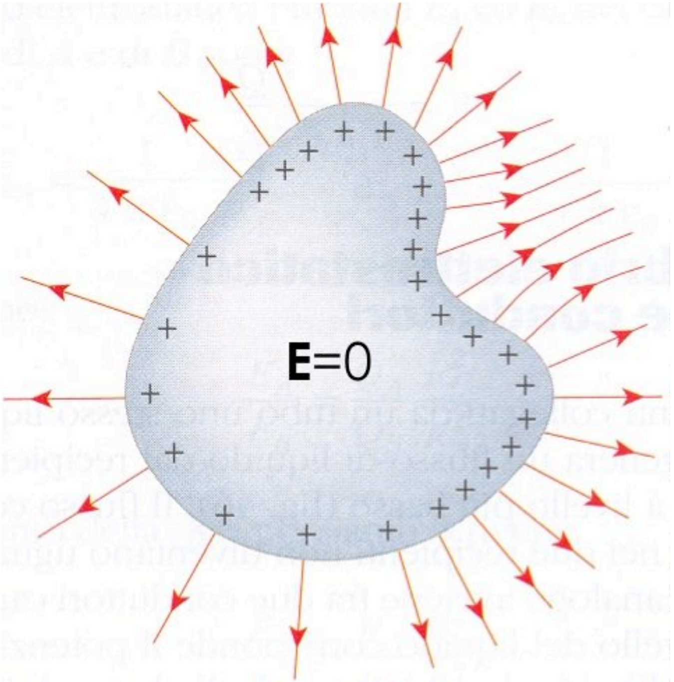
docente di **Matematica e Fisica**

L'equilibrio elettrostatico è la condizione fisica in cui, tutte le cariche presenti sui conduttori che costituiscono il sistema fisico, sono ferme.

Analizziamo alcune proprietà dell'equilibrio elettrostatico.

1) Abbiamo già osservato che:

- il campo elettrico all'interno di un conduttore carico in equilibrio elettrostatico è nullo e che la carica si distribuisce sulla superficie esterna.

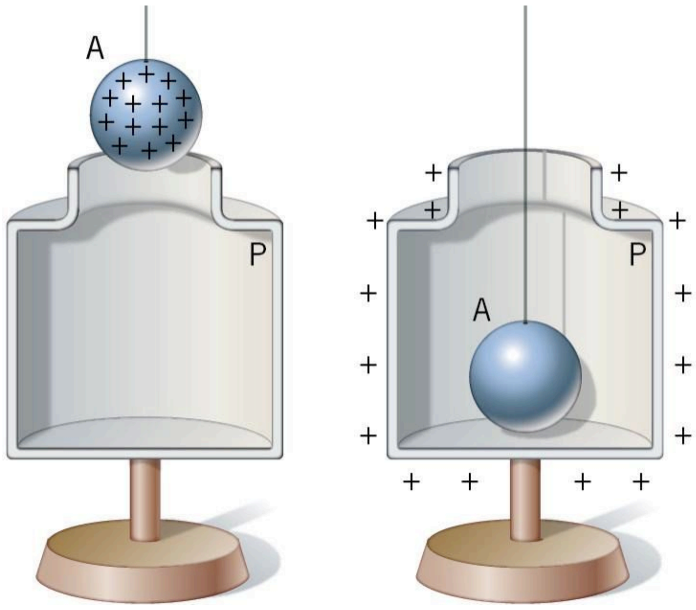


dimostrazione

Se fosse **E**≠0, le cariche libere all'interno del conduttore si muoverebbero, per cui il conduttore non sarebbe in equilibrio elettrostatico come si è ipotizzato. Quindi:

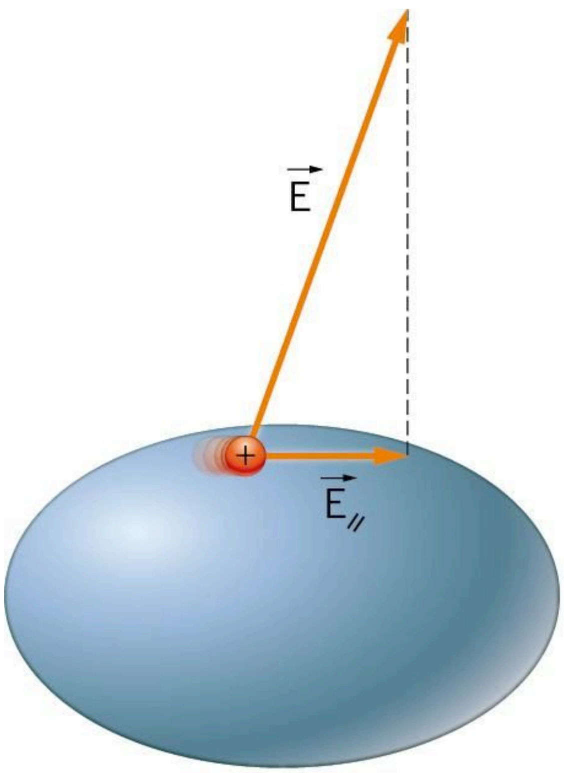
$$\boxed{\text{equilibrio elettrostatico} \Rightarrow \vec{E} = 0 \text{ all'interno del conduttore}}$$

- pozzo di Faraday: quando un conduttore carico A viene inserito in un recipiente metallico P, la sfera A si scarica e la sua carica si porta sulla superficie esterna di P.



- Sulla superficie di un conduttore carico in equilibrio elettrostatico il campo elettrico ha direzione perpendicolare alla superficie stessa.

dimostrazione

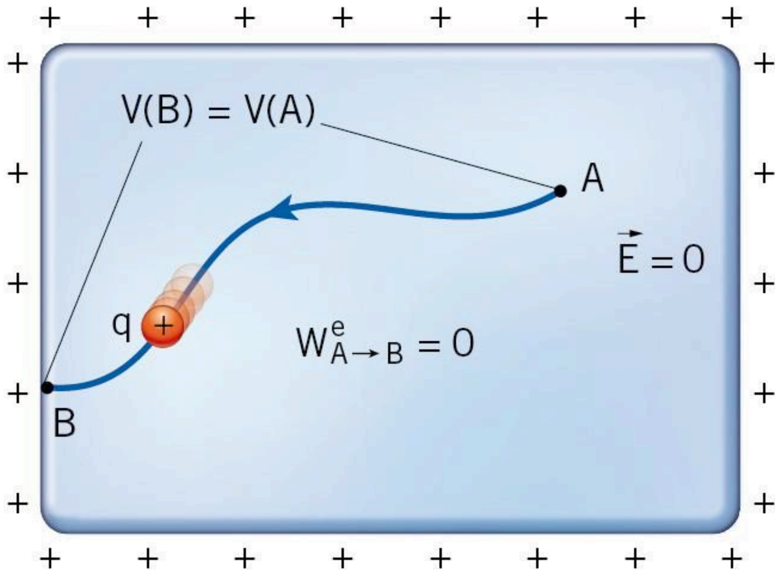


Se **E** non fosse perpendicolare alla superficie, allora la sua componente $\mathbf{E}_{//}$ darebbe origine a una forza elettrica capace di mettere in movimento le cariche presenti sulla superficie esterna del conduttore.

Ma ciò sarebbe in contraddizione con l'ipotesi di equilibrio elettrostatico del conduttore.

➢ superfici equipotenziali: il potenziale elettrico ha lo stesso valore in tutti i punti all'interno e sulla superficie di un conduttore carico in equilibrio elettrostatico.

dimostrazione



Essendo nullo il campo elettrico, è nullo anche il lavoro compiuto su una carica di prova che si sposta da *A* a *B*:

$$W_{A\to B} = 0$$

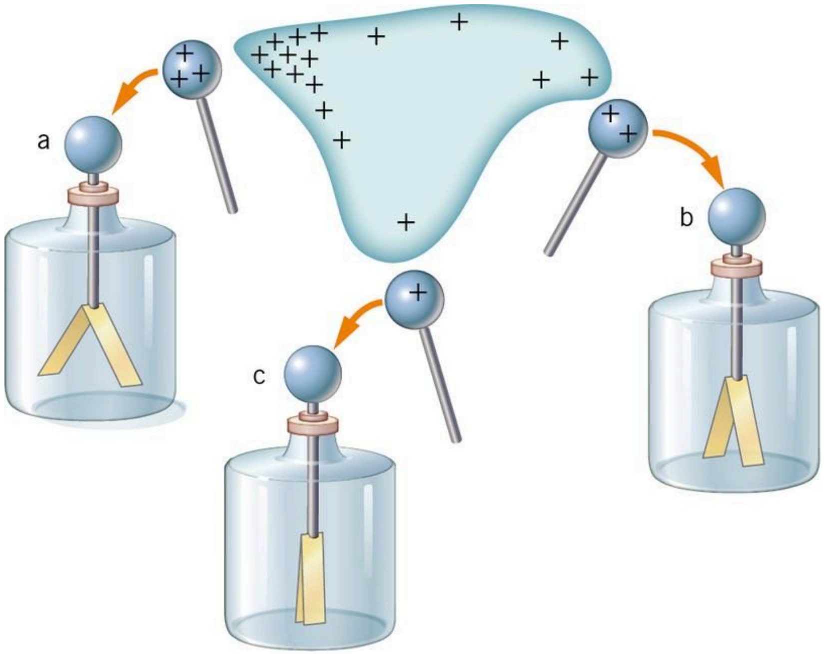
Da questo segue che il potenziale in due punti *A* e *B* qualsiasi, ha lo stesso valore:

$$\boxed{\Delta V = V(B) - V(A) = -\frac{W_{A\to B}}{q} = 0}$$

2) Se il conduttore ha forma regolare (una sfera), per simmetria la carica elettrica si dispone in modo uniforme:

$$\sigma = \frac{\Delta Q}{\Delta S} = \text{costante}$$

3) Se il conduttore ha forma irregolare: la carica si concentra maggiormente nelle parti del conduttore in equilibrio elettrostatico dove hanno una curvatura più accentuata (più "appuntite").



Poiché σ=Q/S può raggiungere valori molto elevati, il campo elettrico in prossimità della punta può diventare molto intenso.

IL PROBLEMA GENERALE DELL'ELETTROSTATICA

Se abbiamo n conduttori, di cui conosciamo forma, posizione nello spazio e la carica elettrica distribuita su ciascuno di essi, allora, con questi dati, possiamo rispondere al seguente:

problema generale dell'elettrostatica

Determinare il potenziale elettrico V, oppure il campo elettrico **E**, in tutti i punti dello spazio.

La risoluzione di questo problema richiede conoscenze matematiche avanzate.

Comunque, utilizzando il teorema di Gauss e che il campo elettrico nei punti immediatamente esterni alla superficie di un conduttore, all'equilibrio elettrostatico, è sempre perpendicolare alla superficie, si dimostra che:

TEOREMA DI COULOMB

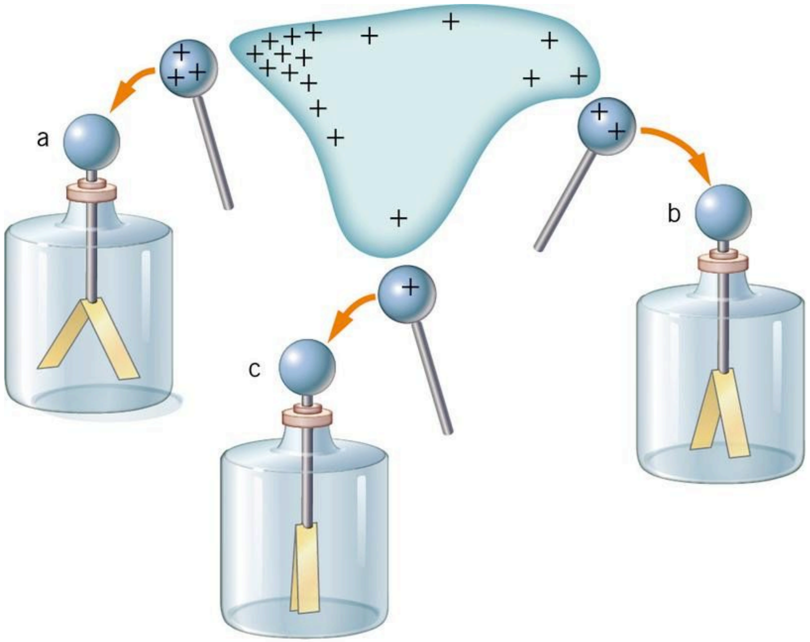
Il modulo *E* del campo elettrico in prossimità della superficie di un conduttore è proporzionale alla densità superficiale di carica:

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{\varepsilon}}$$

Quindi, se conosciamo il campo elettrico, è possibile conoscere la densità superficiale presente sui conduttori: abbiamo una descrizione completa del sistema che volevamo studiare.

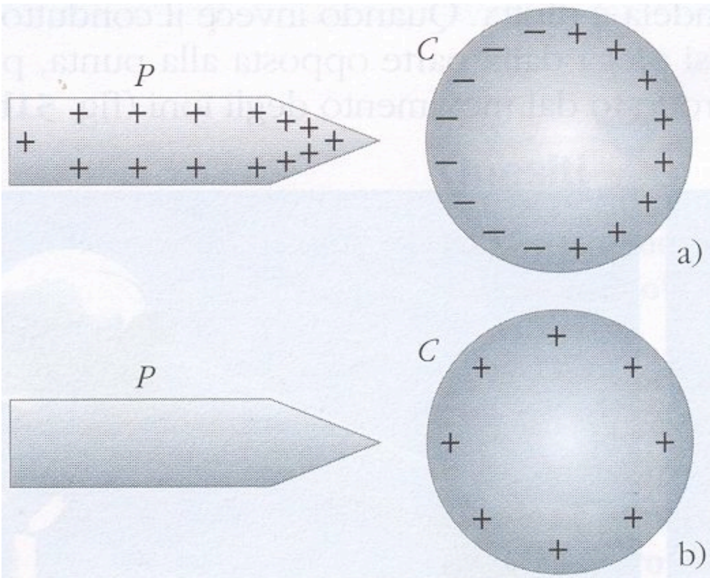
applicazioni

Abbiamo visto che in un conduttore carico le cariche elettriche si concentrano nelle vicinanze delle punte, dove la densità superficiale di carica $\sigma = Q/S$ può raggiungere valori molto elevati.



Di conseguenza, per il teorema di Coulomb:

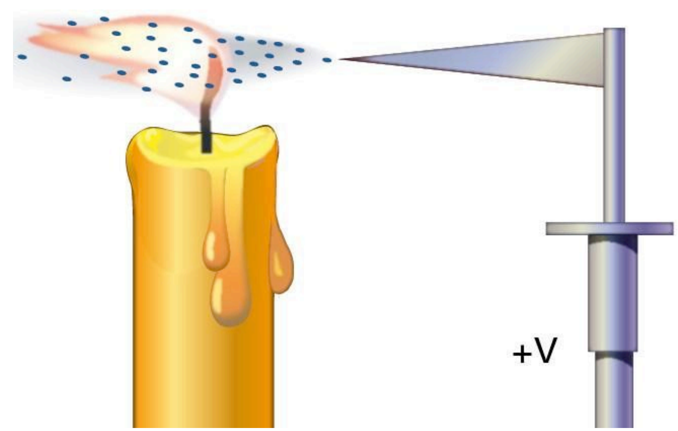
il campo elettrico in prossimità della punta può diventare molto intenso.



Per induzione elettrostatica, C si carica negativamente nella parte più vicina a *P* e positivamente nella parte più lontana. Tra P e C nasce così un campo elettrico che mette in movimento gli ioni presenti nell'aria tra P e C.

Gli ioni negativi saranno attratti dal conduttore *P,* mentre quelli positivi si dirigeranno verso il conduttore C.

Gli ioni respinti da una punta carica creano una corrente d'aria che piega la fiamma.

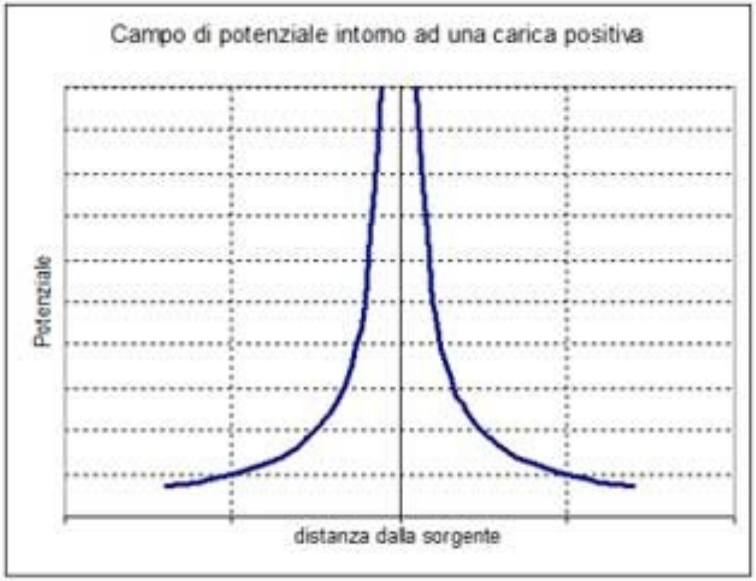


CONVENZIONI PER LO ZERO DEL POTENZIALE

Per conoscere il potenziale elettrico in tutti i punti dello spazio (problema generale dell'elettrostatica), bisogna decidere dove si pone lo zero del potenziale.

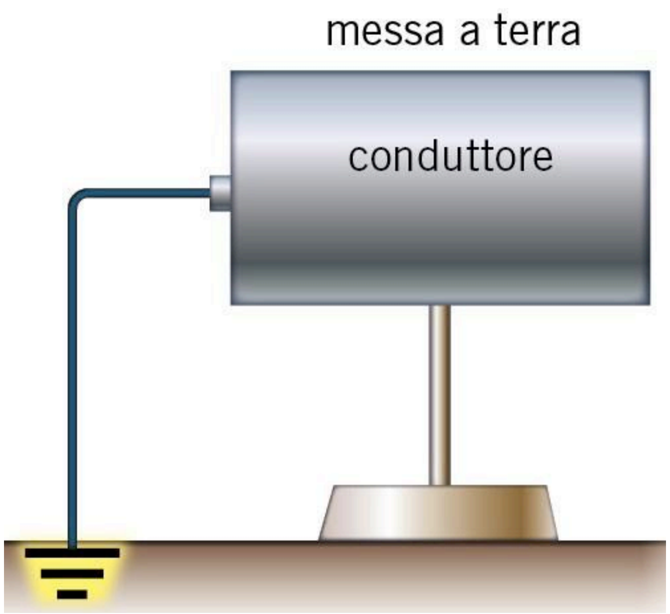
Ci sono tre possibili scelte:

1. **All'infinito**: Porre lo zero del potenziale nei punti che si trovano a distanza infinita rispetto alla carica Q che genera il campo elettrico. *Scelta vantaggiosa quando il campo è creato da un numero finito di cariche puntiformi.*



$$V(r) = k\frac{Q}{r} \xrightarrow{r \to \infty} V(\infty) = 0$$

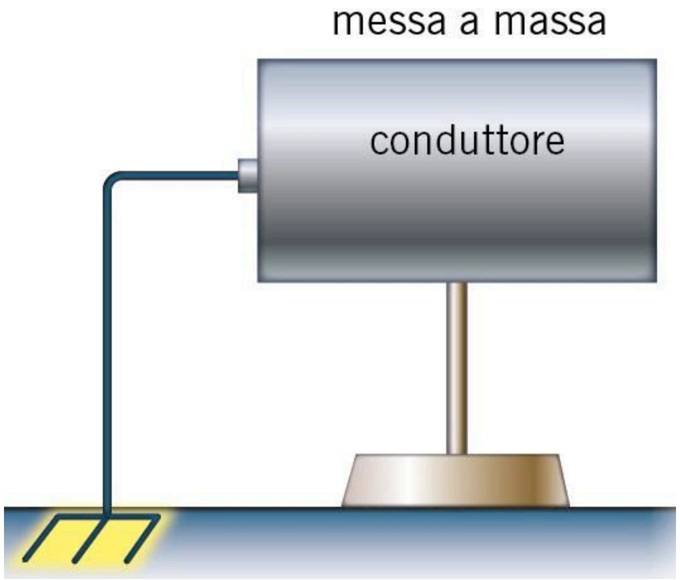
2. **Al potenziale di terra**: Porre lo zero del potenziale pari a quello cui si trova la Terra. Un conduttore che si trova a un potenziale di 20.000 V significa che tale è la differenza di potenziale tra il conduttore e la Terra.



Un conduttore collegato elettricamente con il terreno (messo allo stesso potenziale della Terra) si dice "messo a terra".

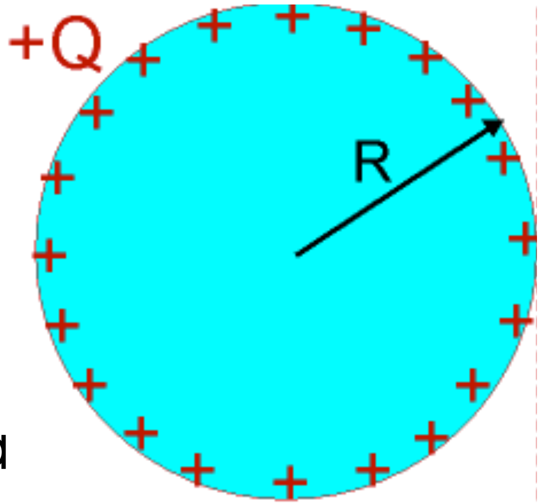
3. **Al potenziale di massa**: Porre lo zero del potenziale pari a quello cui si trova il conduttore. E' la situazione in cui si vuole isolare un ambiente metallico (aereo o auto) dal terreno.

Un conduttore collegato elettricamente a un involucro metallico (cioè che ha lo stesso suo potenziale) si dice "messo a massa".



CAPACITA' DI UN CONDUTTORE

Consideriamo un conduttore isolato (lontano da ogni altro corpo elettrizzato) inizialmente scarico (potenziale elettrico pari a zero).



Se elettrizziamo il conduttore con una carica Q, esso assumerà un certo potenziale elettrico V (positivo o negativo dipende dal segno della carica).

Gli esperimenti dimostrano che esiste una relazione di proporzionalità diretta fra il potenziale V di un conduttore e la sua carica elettrica Q. Questa è una proprietà generale, indipendente dalla forma del conduttore.

Pertanto, possiamo dare la seguente definizione:

CAPACITA' ELETTRICA

Per un qualsiasi conduttore, il rapporto fra la carica elettrica Q e il potenziale V è costante e prende il nome di *capacità elettrica*:

capacità del conduttore (C/V o F)

carica su conduttore (C)

$$C = \frac{Q}{V} \qquad \left[\mathrm{F\,(farad)}\right]$$

potenziale del conduttore (V)

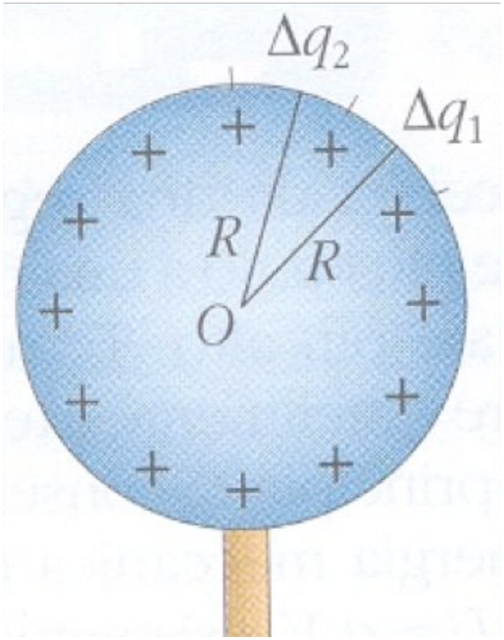
Un conduttore ha la capacità di 1F se, elettrizzato con una carica di 1C, si porta al potenziale di 1V:

$$1\mathrm{F} = \frac{1\mathrm{C}}{1\mathrm{V}}$$

Il termine "capacità" si usa per qualificare i conduttori, così come i recipienti. Possiamo pensare a un conduttore come a un recipiente di carica elettrica: a parità di potenziale *V*, esso può immagazzinare una carica Q tanto più grande quanto maggiore è la sua capacità.

La capacità di un conduttore dipende solo dalla sua forma geometrica (quindi dalle sue dimensioni) e dal materiale isolante in cui è immerso (aria, acqua, ecc.).

Capacità di una sfera isolata



Consideriamo una sferica carica e isolata. Il potenziale è costante in tutti i punti del conduttore (superficie equipotenziale), per cui possiamo riferirci a un punto particolare che ne semplifichi il calcolo: il centro della sfera.

Per il principio di sovrapposizione, il potenziale V del conduttore è la somma dei potenziali dovuti a tutte le cariche distribuite sui vari elementi della sua superficie, tanto piccoli da potersi considerare puntiformi.

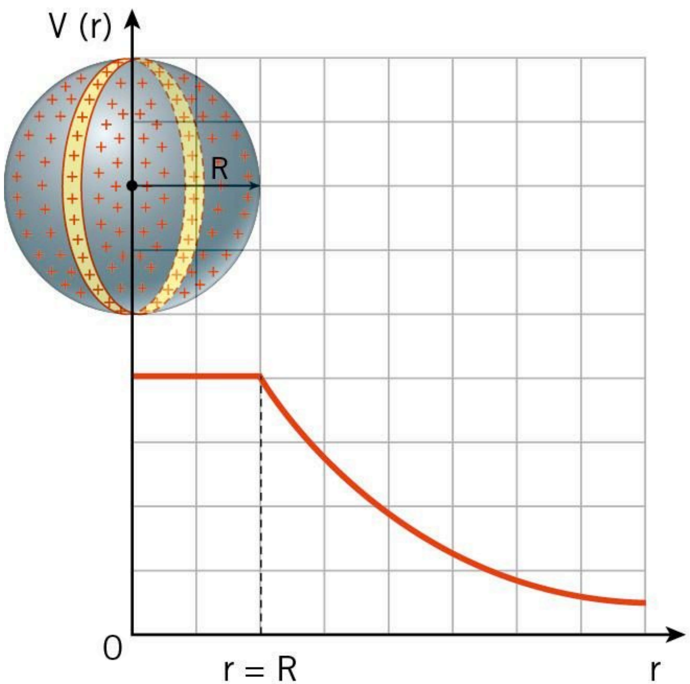
Eseguendo la somma dei vari potenziali si ottiene:

$$\boxed{V = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q}{R}}$$

il potenziale su un conduttore sferico è direttamente proporzionale alla carica e inversamente proporzionale al raggio.

All'esterno il conduttore sferico si comporta come una carica Q puntiforme posta nel centro, per cui il potenziale in un punto a distanza r dal centro è:

$$\boxed{V = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q}{r}}$$



Il potenziale V(r)=costante fino a r=R (retta orizzontale), e poi decresce in modo inversamente proporzionale a r (iperbole).

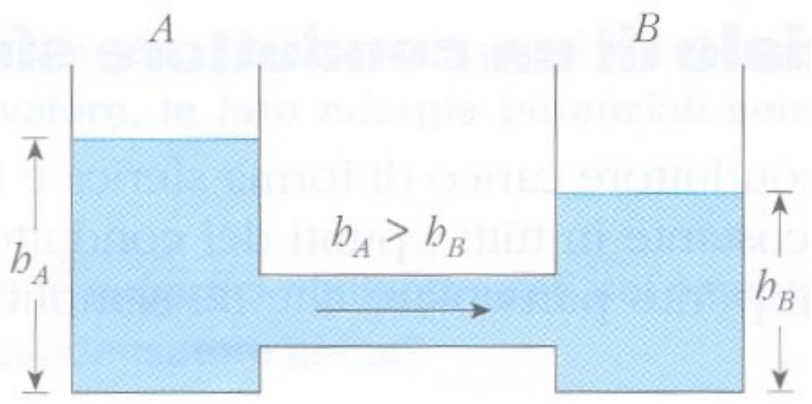
A questo punto siamo in grado di calcolare la capacità della sfera carica isolata:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q}{R}} = 4\pi\varepsilon R$$

La capacità di una sfera conduttrice isolata è direttamente proporzionale al raggio della sfera stessa.

$$\boxed{C = 4\pi\varepsilon R}$$

Equilibrio elettrostatico fra due conduttori

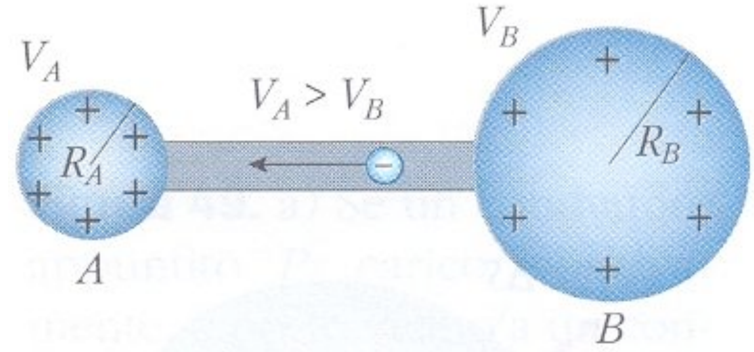


Se in due recipienti collegati da un tubo uno stesso liquido raggiunge livelli diversi, si genera un flusso di liquido dal recipiente a livello più alto verso quello a livello più basso.

Il flusso continua finché i livelli del liquido nei due recipienti diventano uguali.

Un fenomeno analogo avviene fra due conduttori carichi con potenziali diversi: al livello del liquido corrisponde il potenziale del conduttore, al flusso del liquido il movimento degli elettroni di conduzione.

Si abbiano due conduttori sferici *A* e *B,* rispettivamente di raggi R_A e R_B, e *che* posseggano la stessa carica elettrica Q, allora:



$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R} \Rightarrow \text{se } R_A < R_B \Rightarrow V_A > V_B$$

Se colleghiamo con un filo metallico (capacità trascurabile) i due conduttori, si stabilisce un flusso di elettroni da *B* ad *A*. La carica del conduttore *B,* a causa della perdita di elettroni, aumenta di una certa quantità; la carica di *A,* invece, diminuisce della stessa quantità. Di conseguenza V_B aumenta e V_A diminuisce.

Quando i potenziali diventano uguali, cessa il movimento degli elettroni e i conduttori *A* e *B* raggiungono uno stato di equilibrio elettrostatico, nel quale le rispettive cariche Q_A e Q_B sono diverse.

Se la distanza tra i conduttori è sufficientemente grande, è possibile trascurare l'effetto dell'induzione elettrostatica, per cui la carica sulla superficie di ciascun conduttore è distribuita in maniera uniforme.

Pertanto i potenziali risultano: $V_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_A}{R_A}$ $V_B = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_B}{R_B}$

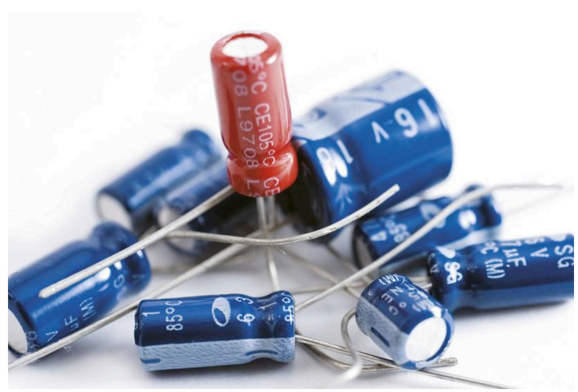
$$\boxed{\text{essendo } V_A = V_B \Rightarrow \frac{Q_A}{Q_B} = \frac{R_A}{R_B}}$$

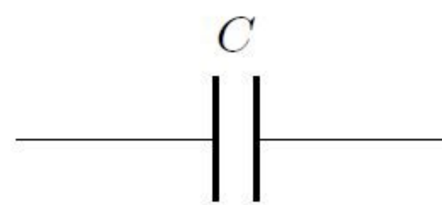
Le cariche sono direttamente proporzionali ai raggi delle sfere.

Per avere capacità elettriche maggiori è opportuno ricorrere a sistemi di conduttori anziché a un singolo conduttore.

Il sistema più semplice è costituito da due conduttori e viene chiamato **condensatore**.

I condensatori sono componenti essenziali dei circuiti elettrici.

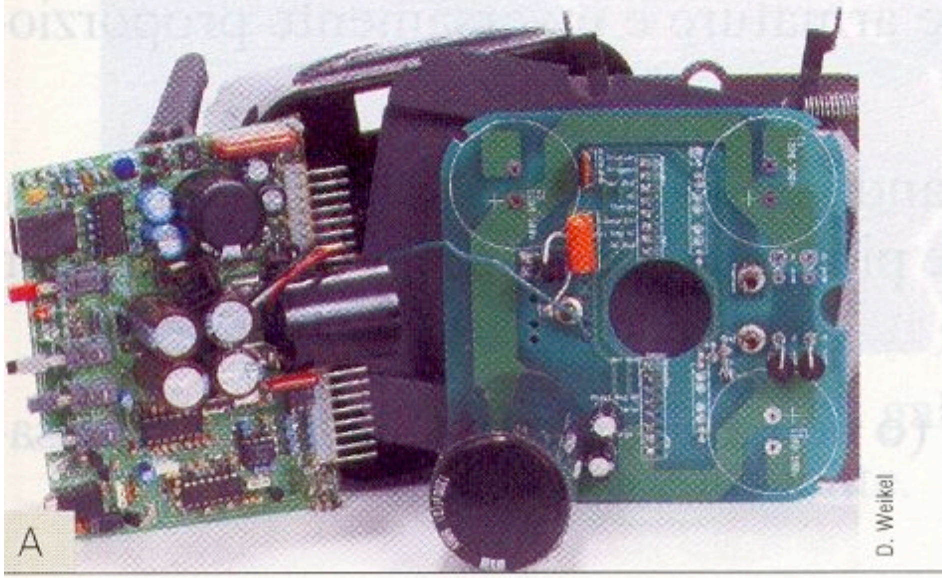




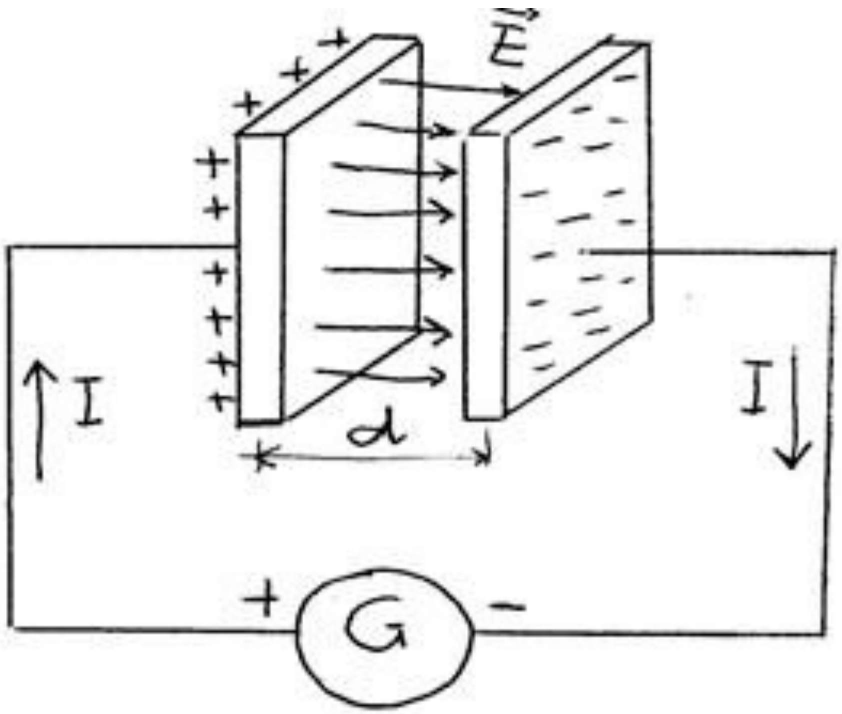
Simbolo del condensatore

In una macchina fotografica, un condensatore accumula l'energia che poi, mediante una scarica veloce, fa funzionare il flash.

In un defibrillatore, un condensatore molto più grande accumula l'energia che poi sarà scaricata per regolarizzare il battito cardiaco.



Per avere capacità elevate occorre che le cariche sui due conduttori (le *armature del condensatore)* siano opposte. Tale risultato si ottiene collegando le due armature ai poli di una batteria.



Ogni condensatore è caratterizzato dalla sua capacità e dalla tensione massima che può essere applicata alle sue armature senza danneggiarlo.

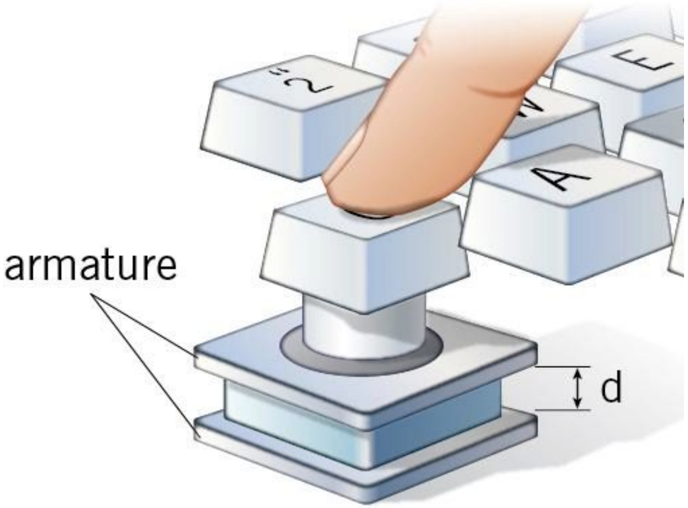
CAPACITÀ DI UN CONDENSATORE

Se le armature di un condensatore sono mantenute a una differenza di potenziale $\Delta V = V_A - V_B$ e Q è il valore assoluto della carica posseduta da ciascuna di esse, si definisce *capacità del condensatore* il rapporto:

$$\boxed{C = \frac{Q}{\Delta V} \qquad (1)}$$

La capacità dipende dai parametri geometrici (superficie delle armature S e distanza tra le armature d) che caratterizzano il condensatore e dalla costante dielettrica ε_R del materiale isolante che può essere interposto fra le armature, attraverso la seguente relazione:

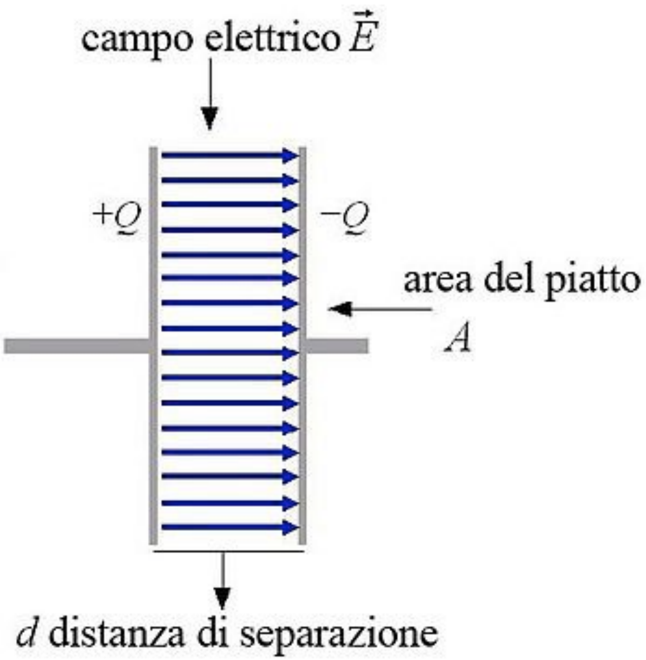
$$\boxed{C = \varepsilon_0 \varepsilon_R \frac{S}{d} \qquad (2)}$$



Premendo il tasto, diminuisce d e la capacità C aumenta. I circuiti elettronici delle tastiere segnalano al computer che il tasto è stato premuto.

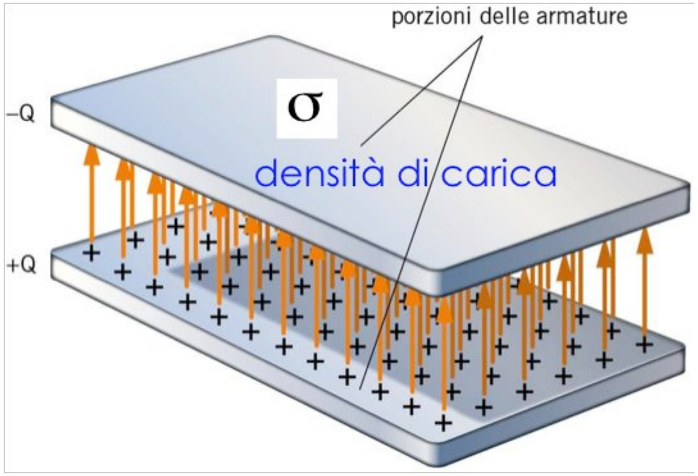
I sistemi touch-screen capacitivi funzionano rilevando una variazione della capacità elettrica nel punto dello schermo premuto.

Come è diretto il campo elettrico all'interno di un condensatore? Nel capitolo sul campo elettrico abbiamo ottenuto il seguente risultato:



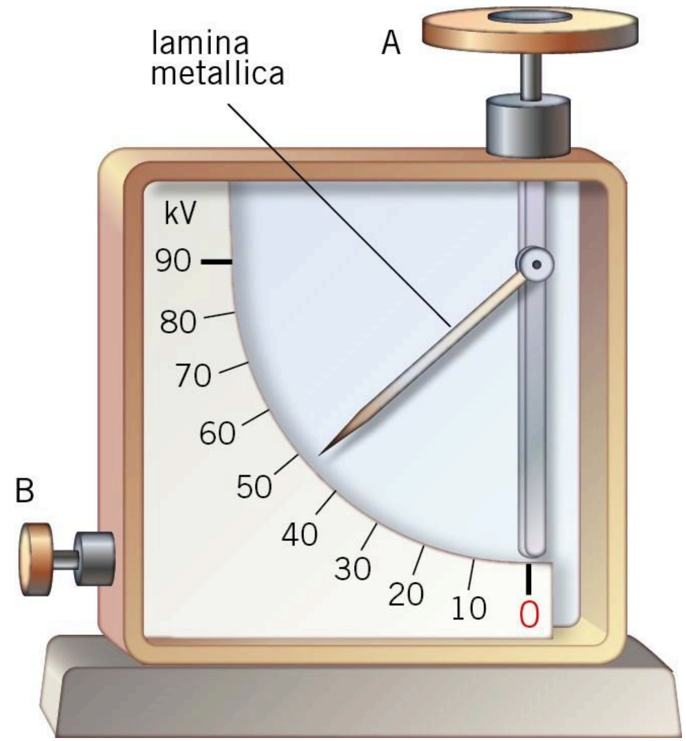
Il campo elettrico è uniforme, ortogonale alle armature, diretto da quella positiva a quella negativa e di intensità pari a:

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{\varepsilon}}$$



elettrometro

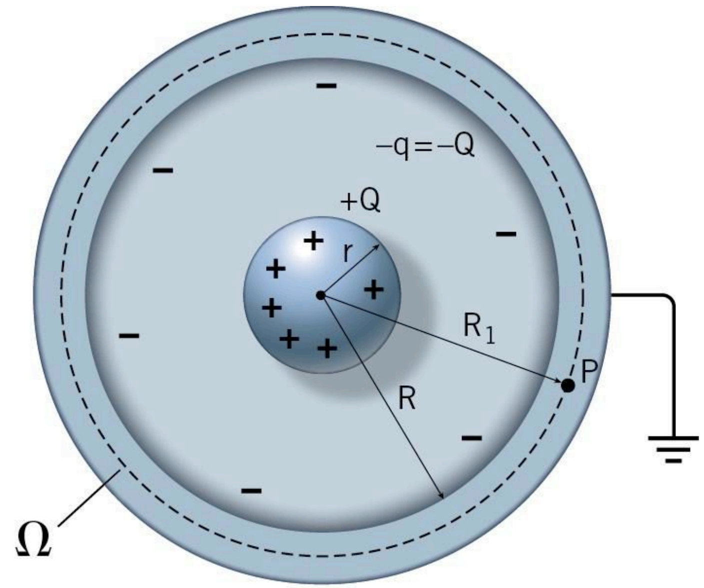
Un **elettrometro** è uno strumento che misura le differenze di potenziale in maniera statica, cioè senza essere attraversato dalla corrente elettrica.



Comportandosi come un condensatore, se vogliamo misurare la ddp tra due punti, basta collegarli ai morsetti A e B. In questo modo, essendo la ddp proporzionale alla carica Q accumulata sulle armature dell'elettrometro, ($\Delta V = Q/C$), l'indice mobile si sposterà su una scala graduata che misurerà la ΔV.

capacità condensatore sferico

Un condensatore sferico è formato da due armature sferiche concentriche di raggi r e R (con r<R).



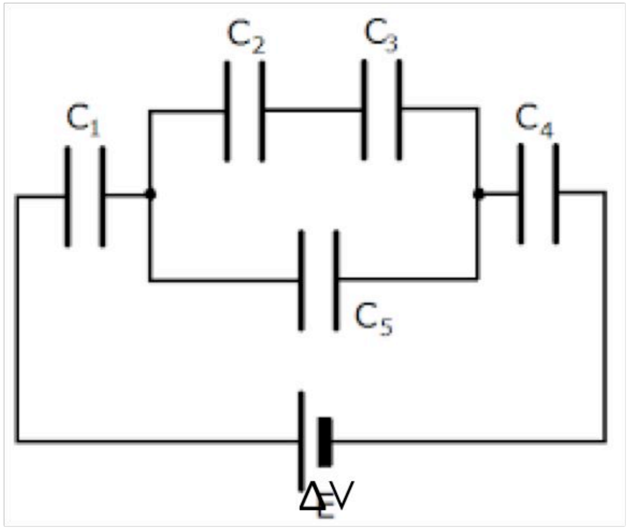
Si dimostra che la capacità di questo condensatore è:

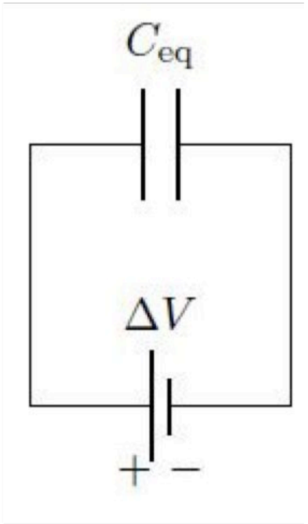
$$\boxed{E = 4\pi\varepsilon \frac{rR}{R - r}}$$

sistemi di condensatori

Nei circuiti elettrici, per ragioni tecniche, possono esserci più condensatori. L'effetto complessivo di questa rete di condensatori è descritto dalla capacità equivalente:

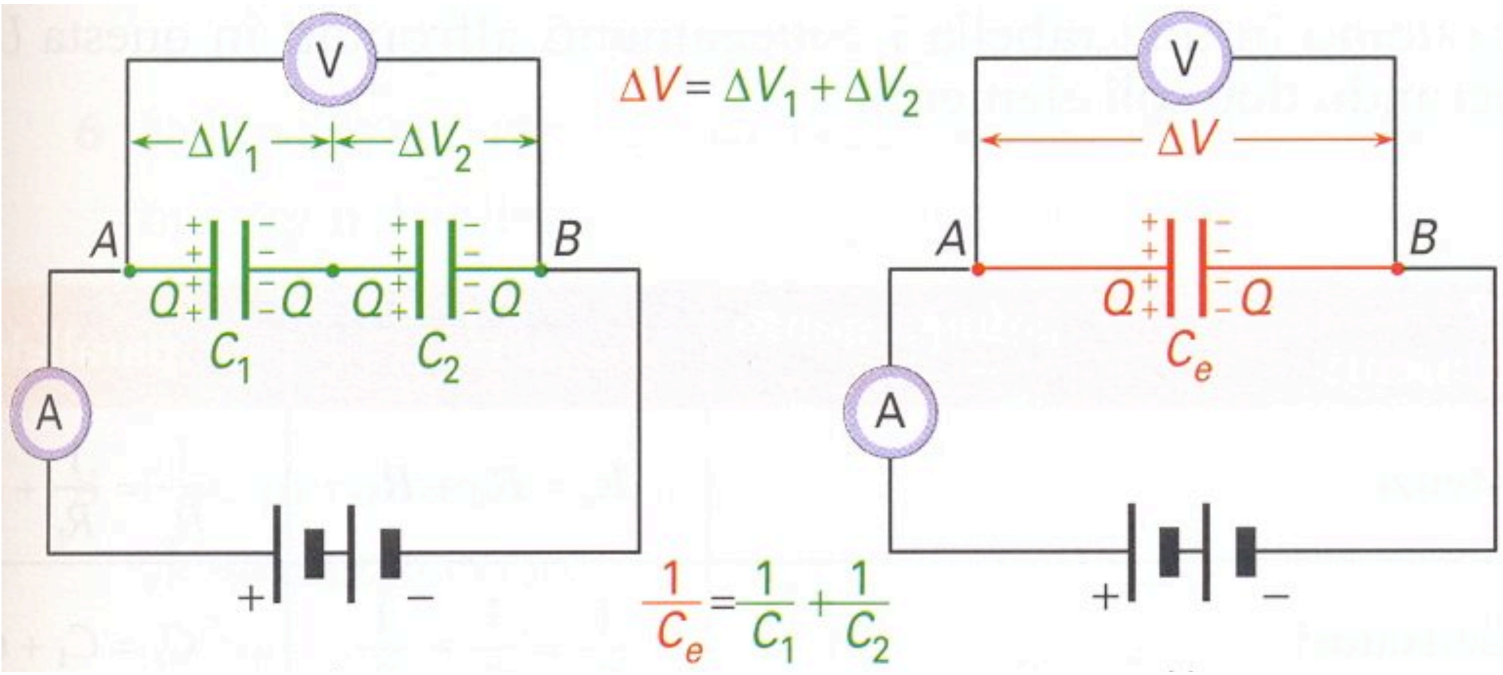
Si chiama **capacità equivalente C_{eq}** di una rete di condensatori quella di un singolo condensatore che, sottoposto alla stessa ddp ΔV a cui è soggetta l'intera rete, assorbe la stessa carica elettrica Q.





In sintesi: C_{eq} svolge la stessa funzione dell'intera rete di condensatori.

➢ condensatori in serie



La *capacità equivalente* C_{eq} dei condensatori in serie, è definita come la capacità del condensatore che, collegato da solo agli stessi terminali *A* e *B*, accumula sulle sue armature una carica uguale a quella esistente sulle armature di ciascun condensatore.

Pertanto: $$\Delta V_{AB} = \Delta V_1 + \Delta V_2 = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) Q \Rightarrow \Delta V = \frac{Q}{C_{eq}}$$

CONDENSATORI IN SERIE

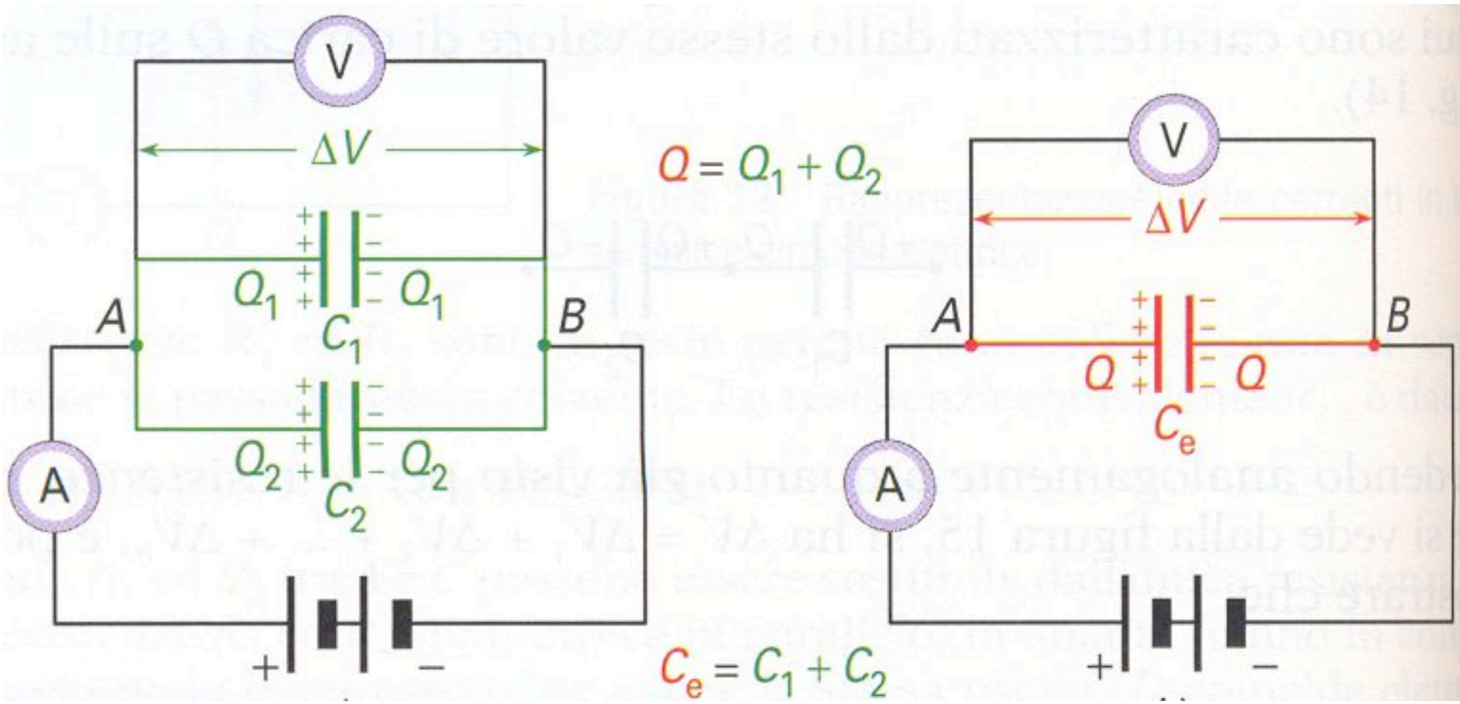
Due o più condensatori collegati in serie sono equivalenti a un unico condensatore avente una capacità C_{eq} pari a:

$$\boxed{\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}}$$

La carica *Q* di C_{eq} è uguale a quella posseduta da ciascun condensatore e la ddp fra le sue armature è pari alla somma delle ddp ai capi dei singoli condensatori.

$$Q = Q_1 = Q_2 = \ldots = Q_n \qquad \Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 + \ldots + \Delta V_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i$$

➢ condensatori in parallelo



La capacità equivalente C_{eq} dei condensatori in parallelo è definita come la capacità di un condensatore che è sottoposto alla stessa ddp dei singoli condensatori (oppure, su C_{eq} si accumula una carica uguale alla somma delle cariche dei singoli condensatori).

Pertanto: $Q = Q_1 + Q_2 = C_1\Delta V + C_2\Delta V = (C_1 + C_2)\Delta V \Rightarrow Q = C_{eq}\Delta V$

CONDENSATORI IN PARALLELO

Due o più condensatori collegati in parallelo sono equivalenti a un unico condensatore avente una capacità C_{eq} pari a:

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + \ldots + C_n = \sum_{i=1}^{n} C_i$$

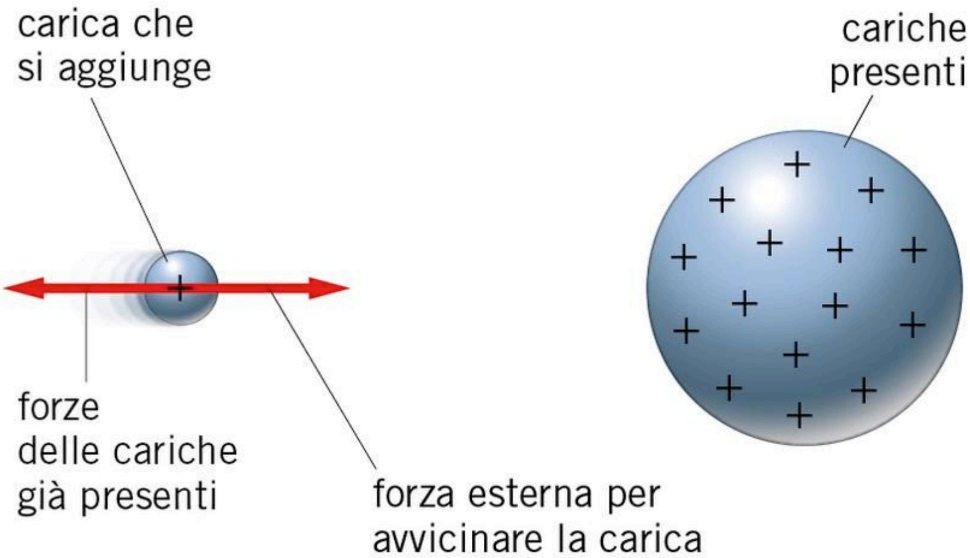
La ddp ΔV ai capi di tale condensatore è uguale a quella esistente fra le armature di ciascun condensatore e la sua carica Q è uguale alla somma delle cariche di tutti i condensatori:

$$\Delta V = \Delta V_1 = \Delta V_2 = \ldots = \Delta V_n \qquad Q = Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_n = \sum_{i=1}^{n} Q_i$$

ENERGIA IMMAGAZZINATA IN UN CONDENSATORI

Per caricare un conduttore inizialmente scarico occorre compiere sempre un lavoro.

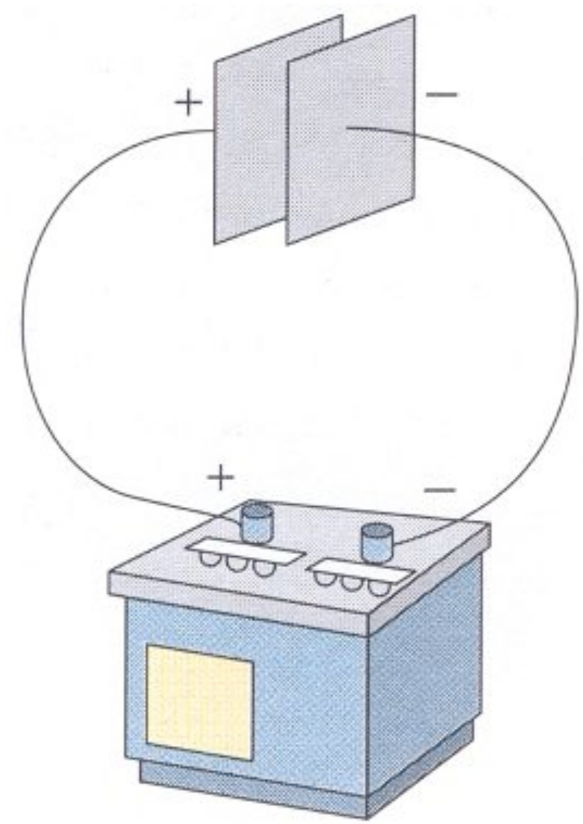
Infatti, in tutte le fasi della sua elettrizzazione le cariche che si trovano già sul conduttore respingono le altre cariche dello stesso segno che vi aggiungiamo.



Per vincere questa repulsione è necessario esercitare una forza nello stesso verso di spostamento delle cariche (lavoro positivo).

Questo discorso vale anche per il condensatore, e il lavoro di cui abbiamo bisogno per caricarlo lo fa il generatore al quale il condensatore viene collegato. Infatti:

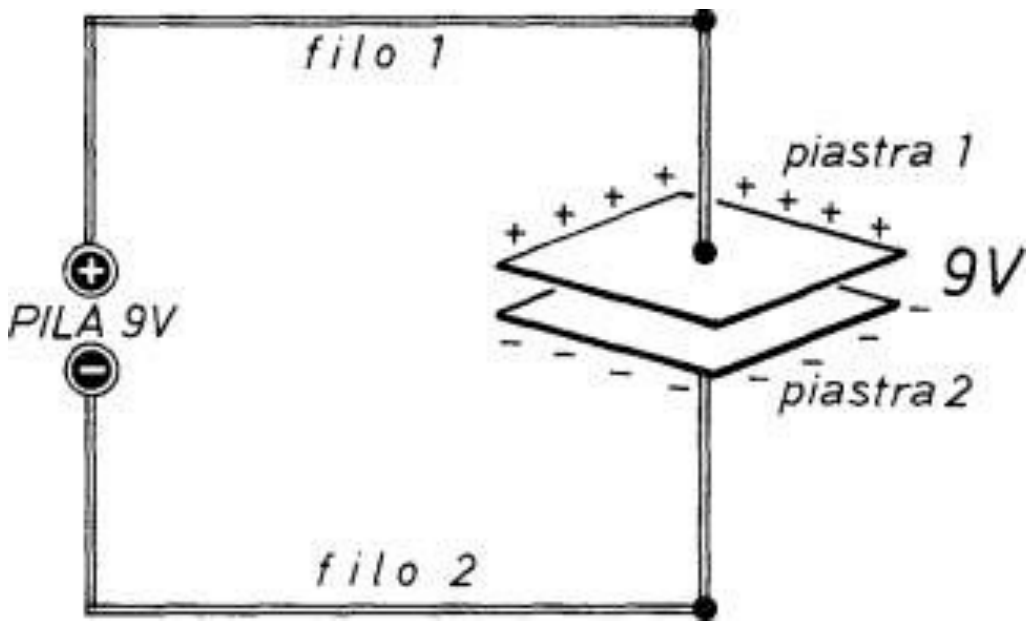
Per caricare un condensatore è necessario portare elettroni dall'armatura positiva a quella negativa.



L'armatura collegata con il polo positivo perde elettroni e assume così una carica positiva, mentre quella collegata con il polo negativo acquista elettroni assumendo una carica opposta.

Appena inizia il trasferimento di elettroni, fra le armature si produce un campo elettrico e il generatore deve compiere un lavoro contro la forza del campo per continuare a portare elettroni da un'armatura all'altra. Tale lavoro è compiuto a spese dell'energia chimica immagazzinata nel generatore.

Il processo termina quando tra le armature si stabilisce la stessa ddp del generatore.

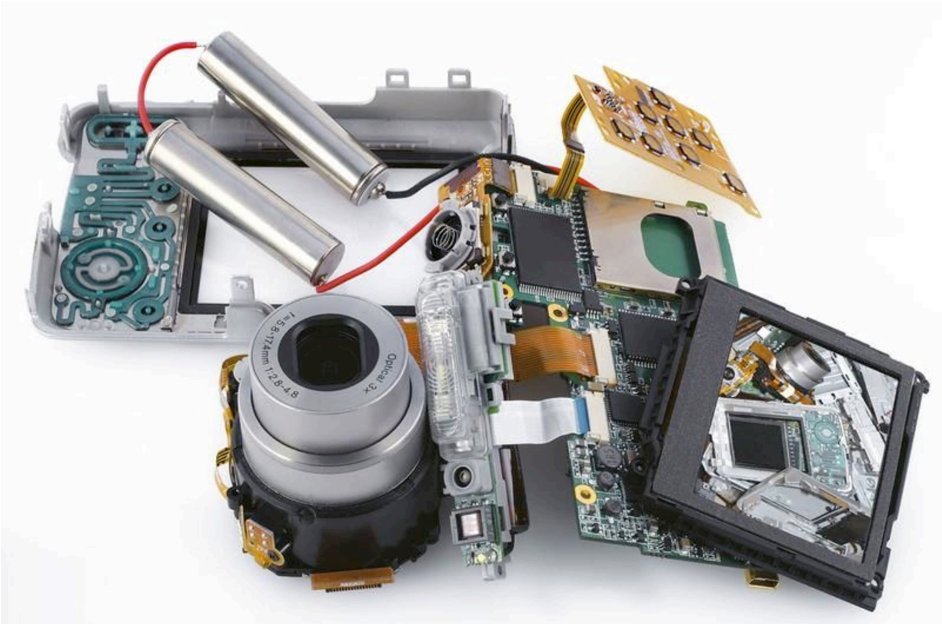


Si dimostra che:

Il lavoro necessario per stabilire una ddp fra le armature di un condensatore di capacità C è pari a:

$$L = \frac{1}{2} Q\Delta V \Leftrightarrow L = \frac{1}{2} C\Delta V^2 \Leftrightarrow L = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

Per il principio di conservazione dell'energia, il lavoro compiuto per caricare il condensatore rimane immagazzinato al suo interno, sotto forma di energia potenziale elettrica, fino a quando non si scarica. Motivo per cui i condensatori sono dei serbatoi di energia.



Macchina fotografica: Il condensatore accumula energia e mediante una scarica veloce fa funzionare il flash.

Defibrillatore: Il condensatore accumula energia che viene poi scaricata per regolarizzare il battito cardiaco

Poiché fra le armature esiste un campo elettrico, il quale si annulla quando il condensatore si scarica, possiamo anche pensare che:

L'energia è immagazzinata nel campo elettrico

Secondo questo punto di vista, si dimostra che:

Densità di energia del campo elettrico

La densità di energia del campo elettrico, definita come energia immagazzinata dal campo per unità di volume, è espressa in funzione del modulo *E* del campo da:

$$\boxed{u = \frac{1}{2}\varepsilon E^2}$$

L'espressione della densità di energia è valida in generale per qualsiasi campo elettrico, anche per un campo non uniforme.

Il fatto che alla presenza di un campo elettrico è associata una ben definita quantità di energia conferma il fatto che il vettore campo elettrico **E** non è uno strumento matematico utile per descrivere una situazione fisica, ma una realtà fisica osservabile e quindi misurabile.

CONCLUSIONE: VERSO LE EQUAZIONI DI MAXWELL

Le proprietà matematiche del campo elettrico sono descritte dalle seguenti due equazioni:

Teorema di Gauss

$$\Phi_{\Omega}(\vec{E}) = \frac{Q_{tot}}{\varepsilon}$$

Teorema della circuitazione

$$C(\vec{E}) = 0$$

Si tratta di due delle quattro equazioni di Maxwell (caso elettrostatico).